

# **Wykład IV**

## **Absorpcja i dyspersja**

Widmo  
Słońca

Absorpcja  
światła

Kreacja  
par  
elektron  
- dziura

Dryft/dyfuzja  
nośników

Separacja  
nośników

Zbieranie  
nośników

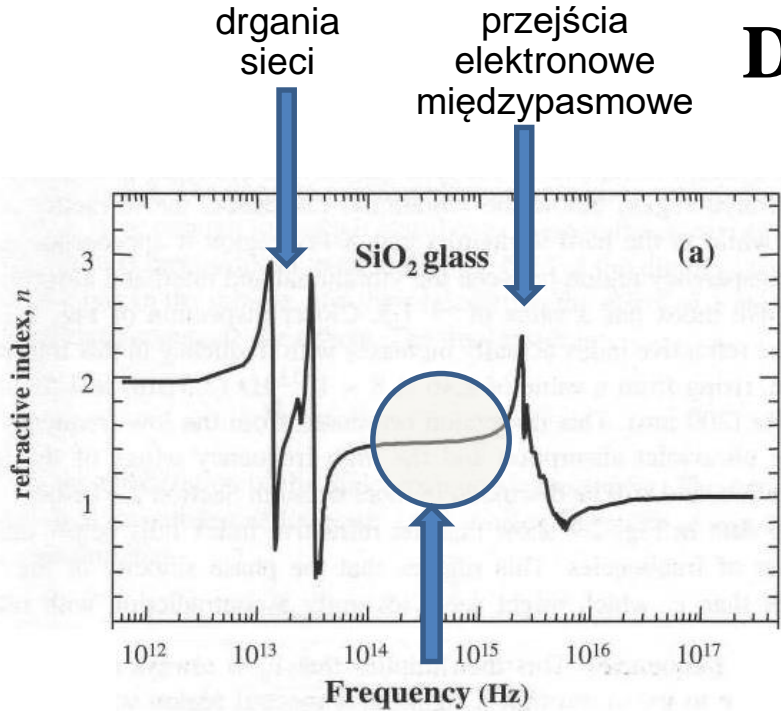
## ang. Light Management Methods

Wydajność konwersji energii słonecznej:

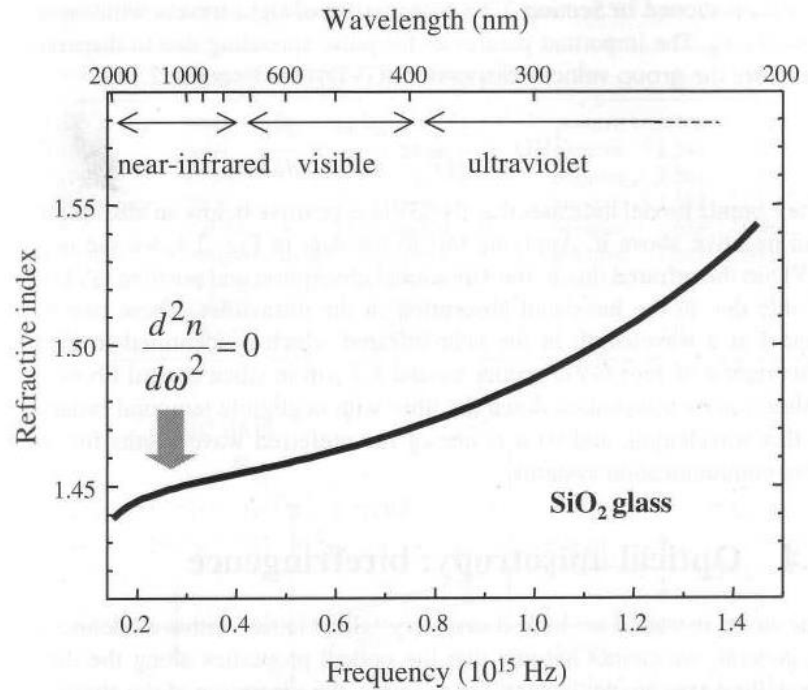
$$\eta = \frac{E_{wy}}{E_{we}}$$

$$\eta_{całkowite} = \eta_{absorpcja} \times \eta_{kreacja} \times \eta_{dryft/dyf} \times \eta_{separ} \times \eta_{zbierania}$$

# Dyspersja



przezroczyste dla światła widzialnego



Dyspersja normalna  $\frac{dn}{d\omega} > 0$

Dyspersja anomalna  $\frac{dn}{d\omega} < 0$

Parametr, który decyduje o dyspersji prędkości grupowej  $D = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}$ .

Długość fali dla której  $\frac{d^2n}{d\omega^2} = 0$  dla  $\text{SiO}_2$   $\lambda = 1300\text{nm}$ .

# Prędkość grupowa

Impuls światła jest transmitowany w ośrodku z prędkością grupową  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega n}{c}$$

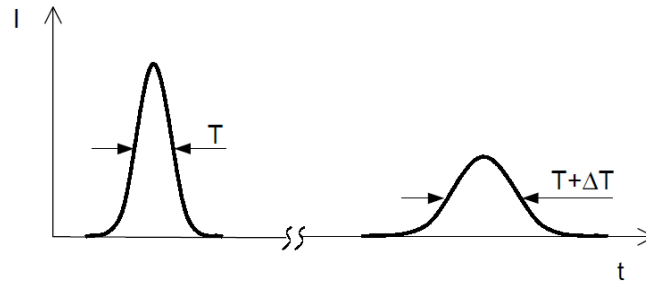
$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d\left(\frac{\omega n}{c}\right)}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} = \frac{1}{v} \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}\right)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}\right)^{-1} = v \left(1 - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1}$$

Różne składowe fali (różniące się częstotliwościami lub wektorami falowymi) rozchodzą się z różnymi szybkościami. To prowadzi do dyspersji prędkości grupowej.

# GVD

Jeśli w ośrodku występuje dyspersja prędkości grupowej, to następuje poszerzenie impulsu w miarę jak impuls przemierza ten ośrodek.



Czasowe poszerzenie impulsu związane z dyspersją prędkości grupowej jest opisywane współczynnikiem dyspersji prędkości grupowej (ang. GVD – group velocity dispersion):

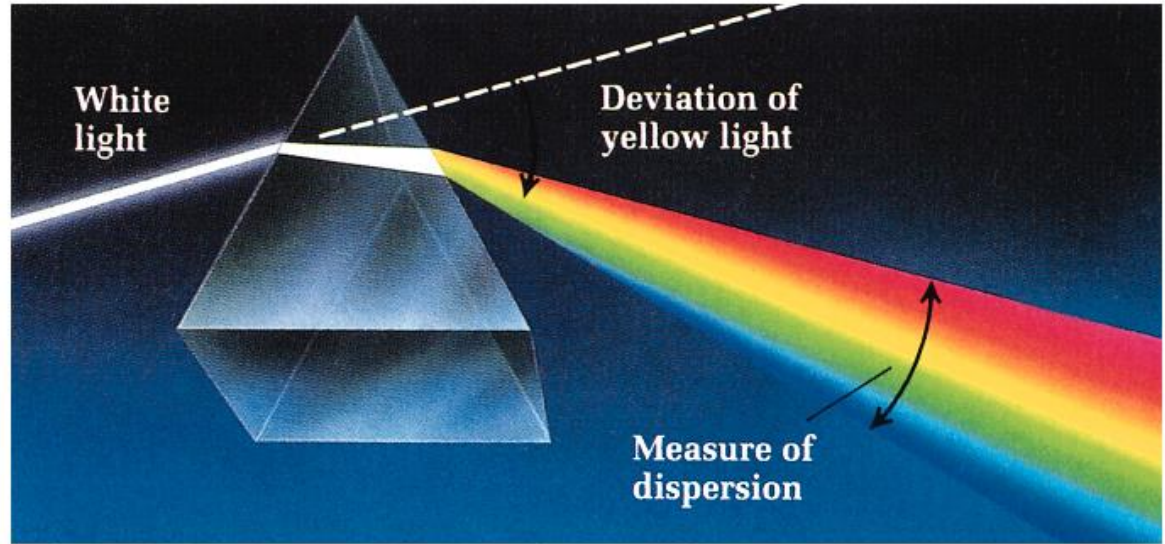
$$D = -\frac{\lambda d^2 n}{c d\lambda^2}$$

Poszerzenie czasowe impulsu związane z dyspersją powoduje trudności w transmisji bardzo krótkich impulsów przez światłowód (rzędu *ps*).

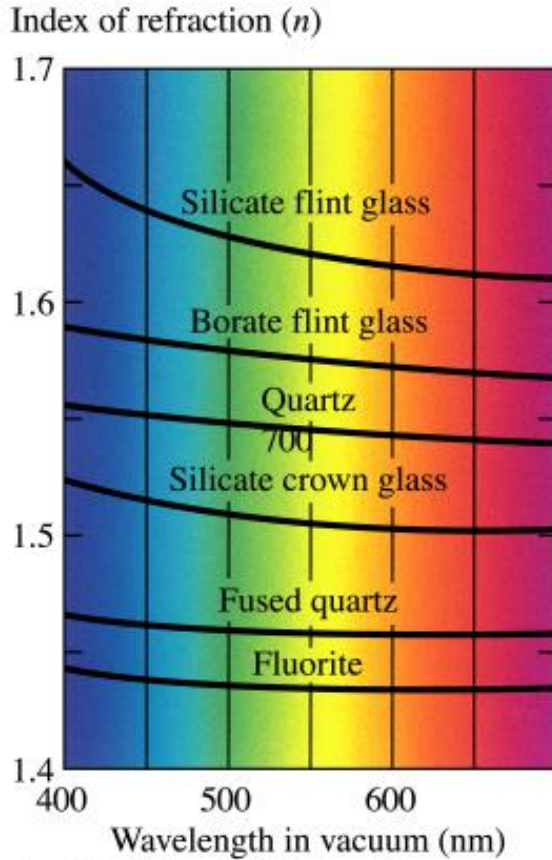
Długość fali dla której  $\frac{d^2 n}{d\omega^2} = 0$  dla  $\text{SiO}_2$   $\lambda = 1300\text{nm}$ . Dlatego jest to preferowana długość fali w telekomunikacji.

# Dyspersja (rozszczerpienie)

$$n = f(\lambda)$$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

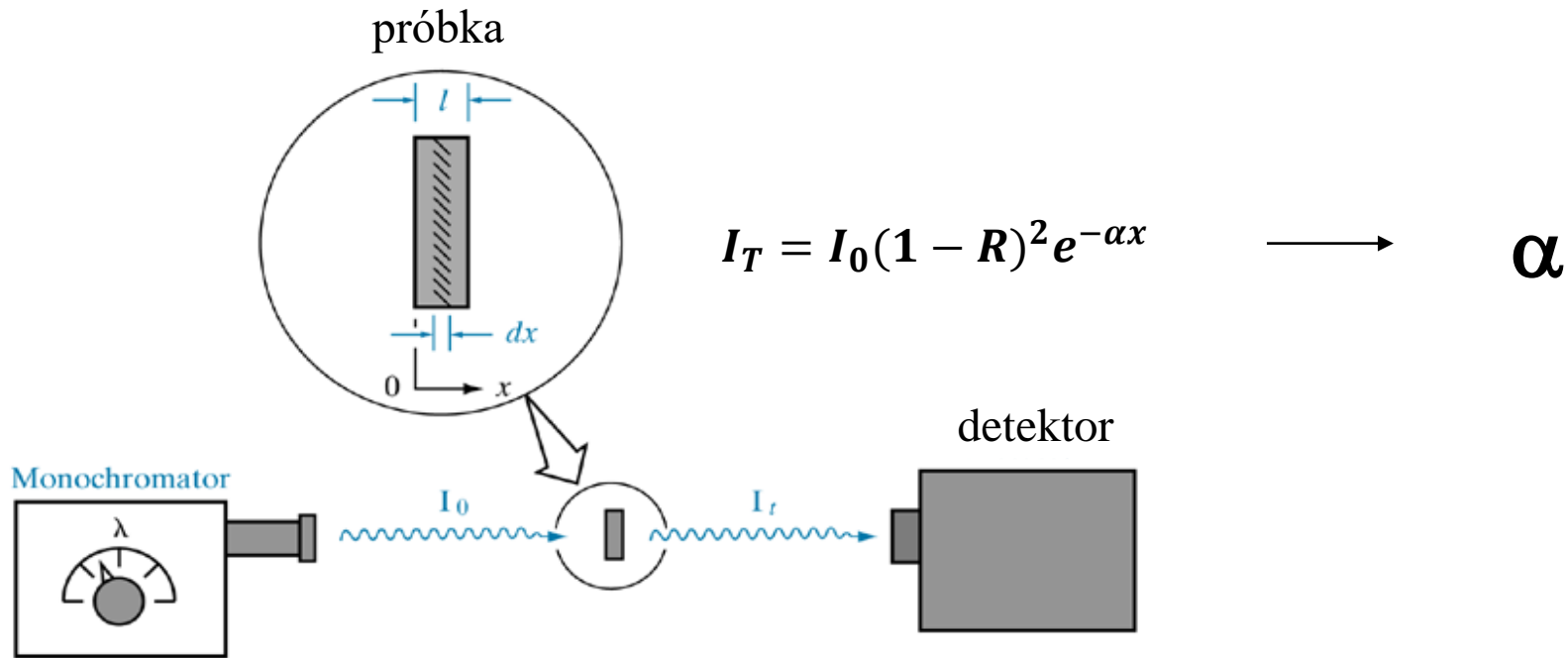
$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{1}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \quad \rightarrow$$

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{A_j \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_j^2)} \quad \rightarrow \quad n = C_1 + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^4} + \dots$$

Równ. Sellmayer'a

Równ. Cauchy'ego

# Pomiar współczynnika absorpcji



Wielkość, która określa jak światło o określonej  $\lambda$  wnika do ośrodka nazywa się głębokością wnikania:

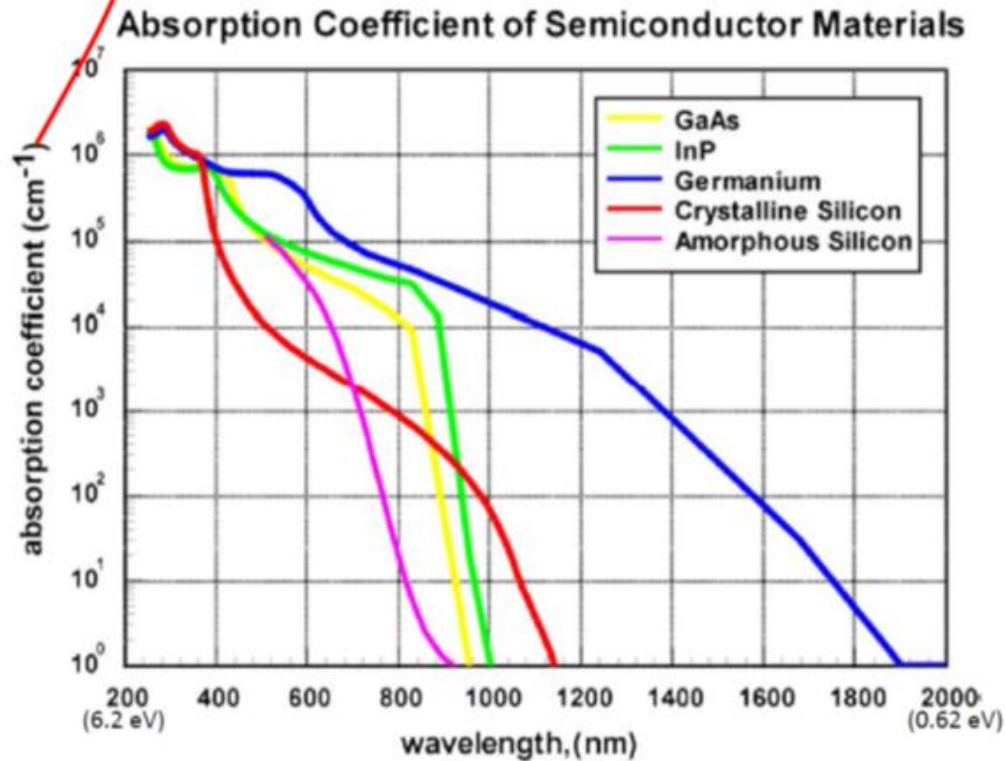
$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

Laser (nm)	Penetration depth (nm)	
$\lambda$	Si	Ge
633	3000	29
514	762	22
457	313	19
325	~10	~9
244	~7	~8

Dla tej głębokości transmitancja przy założeniu, że  $R = 0$ :  $\mathbf{T} = \frac{I_T}{I_0} = \frac{1}{e}$

# Współczynnik absorpcji

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot l}$$

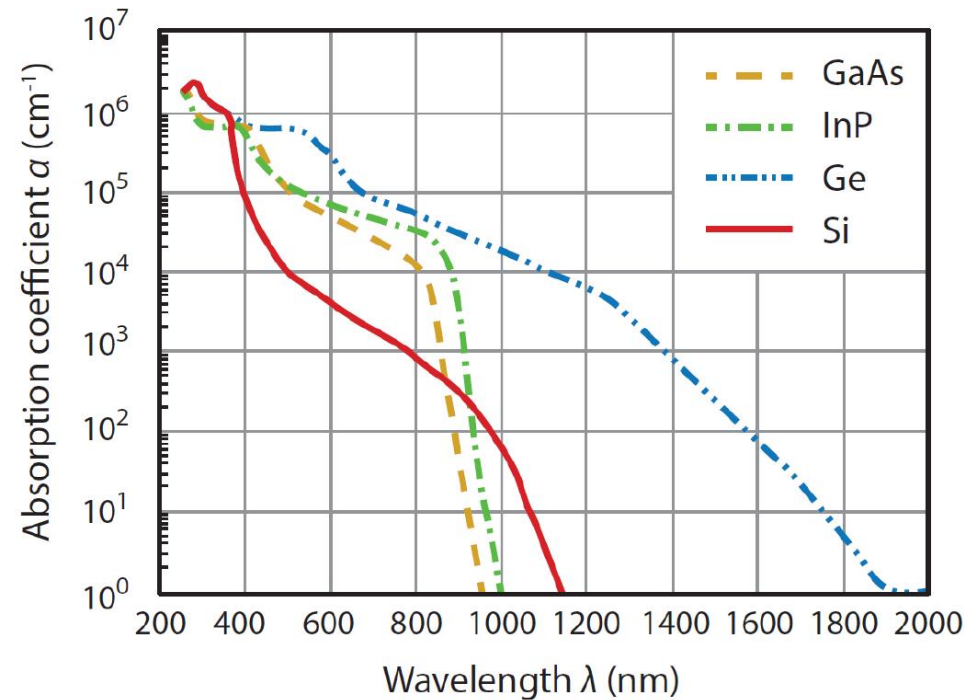


Półprzew.	$E_g$ [eV] w 300K
Si krystal.	1,12
Si amorf.	1,7-1,8
Ge	0,66
GaAs	1,43
InP	1,29

- W Si przejścia proste są dopiero dla  $\lambda < 400\text{nm}$
- Aby zaabsorbować taką samą ilość światła grubość warstwy Si musi być znacznie większa od grubości GaAs.



# Współczynnik absorpcji



$$\alpha_{Si}(400\text{nm}) = 9 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

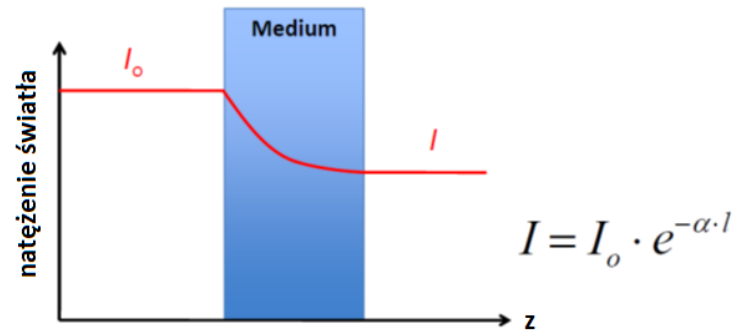
$$\alpha_{Si}(700\text{nm}) = 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$$

$$I_x = I_0 e^{-\alpha x} \longrightarrow \ln\left(\frac{I_x}{I_0}\right) = -\alpha x$$

$$\ln(0.1) = -9 \cdot 10^4 x \quad x = 0.26 \mu\text{m}$$

$$\ln(0.1) = -2 \cdot 10^3 x \quad x = 11.5 \mu\text{m}$$

# Wyprowadzenie prawa Lamberta-Beera



Natężenie światła  $I = \frac{P}{S}$

Zmiana natężenia światła w warstwie o grubości dz:  $dI(z) = -\alpha I(z) dz$

Po scałkowaniu:  $I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$

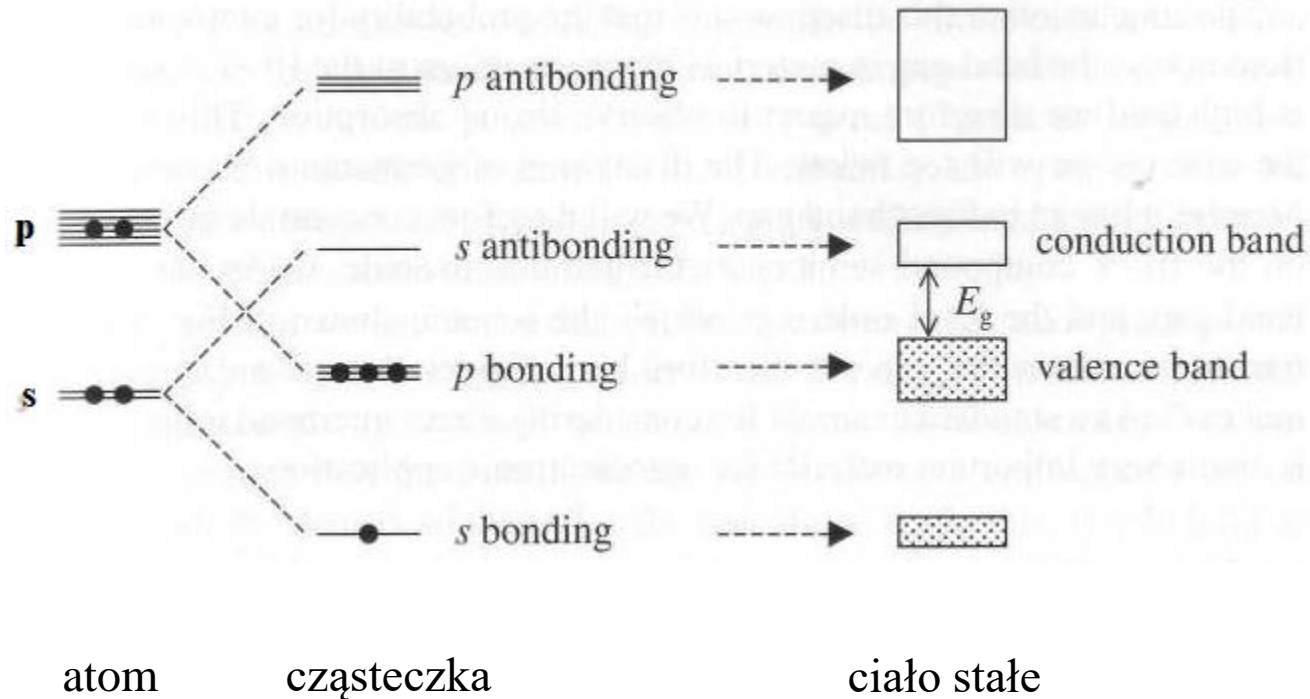
$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Gęstość optyczna (absorbancja)  $O.D. = -\log\left(\frac{I(l)}{I_0}\right) = -\log T = \frac{\alpha l}{\ln 10} = 0,434 \alpha l$

Absorbancja naturalna, ekstynkcja  $E = \ln \frac{I_0}{I_t}$

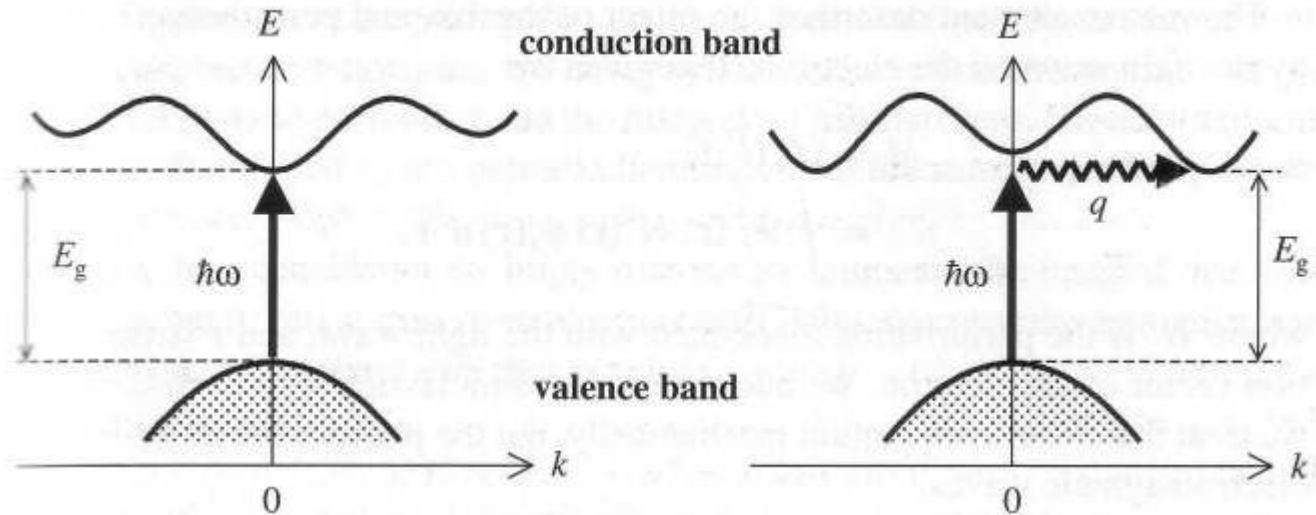
# **Absorpcja światła w półprzewodnikach**

# Diagram pasmowy półprzewodnika



- Przejścia optyczne pasmo walencyjne – pasmo przewodnictwa w półprzewodnikach IV grupy, III-V oraz II-VI zachodzą między stanami p i s.
  - Takie przejścia są dozwolone ( $\Delta l = \pm 1$ ), jako przejścia dipolowe (dipol w polu elektrycznym fali elektromagnetycznej).
  - Funkcja stanu s jest parzysta  $(-1)^l = (-1)^0 = 1$
  - Funkcja stanu p jest nieparzysta  $(-1)^l = (-1)^1 = -1$
- ( $l$  – orbitalna liczba kwantowa)

# Przejścia optyczne w półprzewodniku



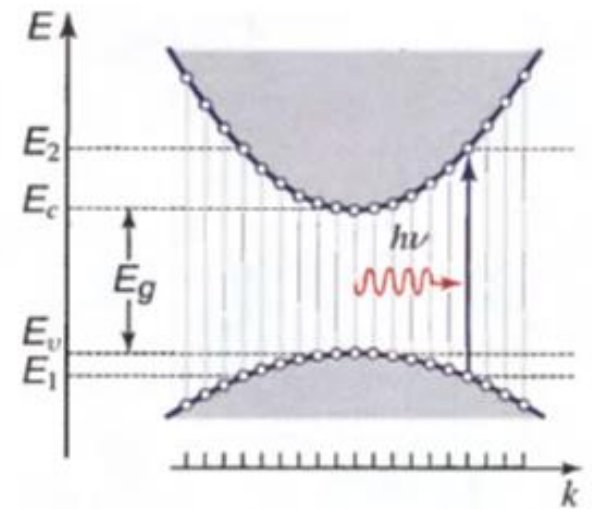
**Prosta przerwa wzbroniona**

**Skośna przerwa wzbroniona**

# Przejścia proste

Prawdopodobieństwo przejścia z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \rho(h\nu)$$

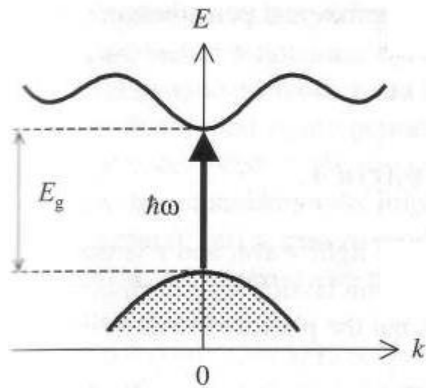


gdzie  $M$  – element macierzowy przejścia,  $\rho(h\nu)$  – łączna gęstość stanów

$$M = \langle f | H' | i \rangle = \int \Psi_f^*(\vec{r}) H'(\vec{r}) \Psi_i(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad H' = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}$$

gdzie  $\vec{p}_e = -e\vec{r}$  moment dipolowy oddziaływania elektron-pole elektryczne fali elektromagnetycznej, o natężeniu  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$

$$H' = e\vec{E}_0 \cdot \vec{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$



# Przejścia proste - element macierzowy

Stany elektronowe opisują funkcje Blocha:

$$\Psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} u_i(\vec{r}) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad \Psi_f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} u_f(\vec{r}) e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}$$

$$M = \frac{e}{V} \int u_f^*(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} (\vec{E}_0 \cdot \vec{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) u_i(\vec{r}) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} *$$

gdzie całkowanie jest po całym kryształ.

Przejście proste:  $\hbar\vec{k}_f - \hbar\vec{k}_i = \hbar\vec{k}$

Ta równość oznacza, że faza w równaniu \* jest równa zero. Dzięki temu oraz ze względu na periodyczność funkcji  $u_i(\vec{r})$ , można się ograniczyć do jednej komórki elementarnej i ostatecznie, zakładając, że fala em. jest spolaryzowana w kier. osi x:

$$|M| \propto \int_{k.el.} u_f^*(\vec{r}) x u_i(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Liczba falowa dla fotonów z zakresu widzialnego jest rzędu  $10^7 m^{-1}$ ; liczba falowa elektronów z krawędzi strefy Brillouina  $\sim 10^{10} m^{-1}$ . Pomijamy pęd fotonu:

$$\vec{k}_f = \vec{k}_i$$

**Dlatego na rys. przejście proste tj. linii pionowa!**

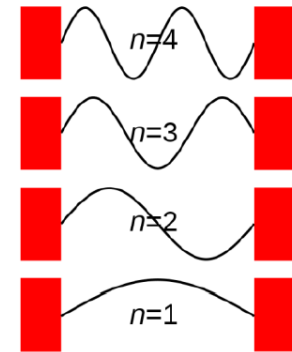
# Gęstość stanów w przestrzeni k

Elektrony na dnie pasma przewodnictwa (i dziury przy wierzchołku pasma walencyjnego) można traktować jak cząstki w pudle potencjału. Funkcja falowa elektronu w pudle potencjału to fala stojąca:

$$\psi(x, y, z) = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

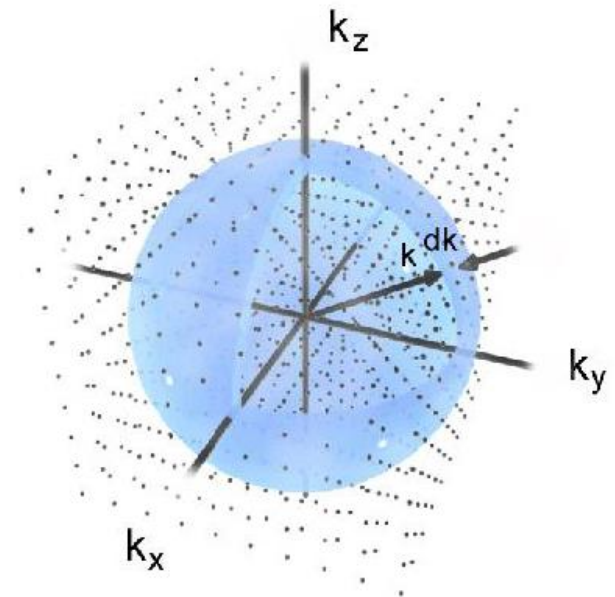
Dozwolone wartości k:

$$k_x L_x = \pi n_x, k_y L_y = \pi n_y, k_z L_z = \pi n_z, \quad n_x, n_y, n_z \text{ liczby całkowite}$$



- Dozwolone wartości k można przedstawić w przestrzeni k w postaci sieci punktów odległych o  $\pi/L_{x,y,z}$ .
- Objętość, którą zajmuje każdy stan k wynosi  $\pi^3/L_x L_y L_z$ . Odwrotność tej wielkości, to gęstość stanów w przestrzeni k:

$$\rho(\mathbf{k}) = \frac{V}{\pi^3}$$





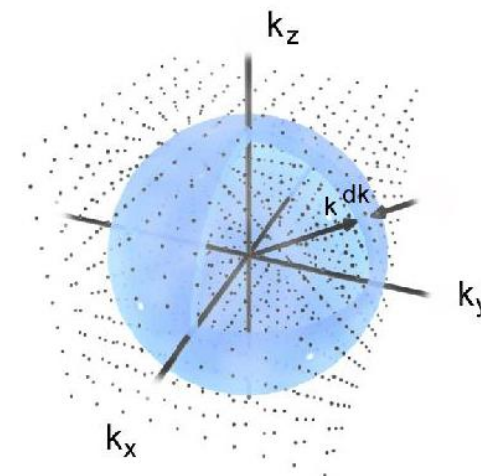
# Gęstość stanów w przestrzeni k

Liczba stanów zawarta w przedziale od  $k$  do  $k+dk$ , jest równa gęstości stanów pomnożonej przez objętość sfery o promieniu  $k$  i grubości  $dk$ ,  $4\pi k^2 dk$ :

$$\rho(k)dk = 4\pi k^2 \left[ \frac{V}{\pi^3} \right] dk$$

Ze względu na spin:

$$\rho(k)dk = 8\pi k^2 \left[ \frac{V}{\pi^3} \right] dk$$



Dzielimy przez 8, bo uwzględniamy tylko dodatnie  $n_x, n_y, n_z$  (zakładając propagację fali stojącej już uwzględniamy obydwa kierunki  $\vec{k}$ ):

$$\rho(k)dk = \pi k^2 \left[ \frac{V}{\pi^3} \right] dk = \left[ \frac{Vk^2}{\pi^2} \right] dk$$

Dla elektronów w pasmie przewodnictwa:

$$p = \hbar k, E = p^2 / 2m^* \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

$$k^2 = \frac{(E - E_c) 2m^*}{\hbar^2}$$

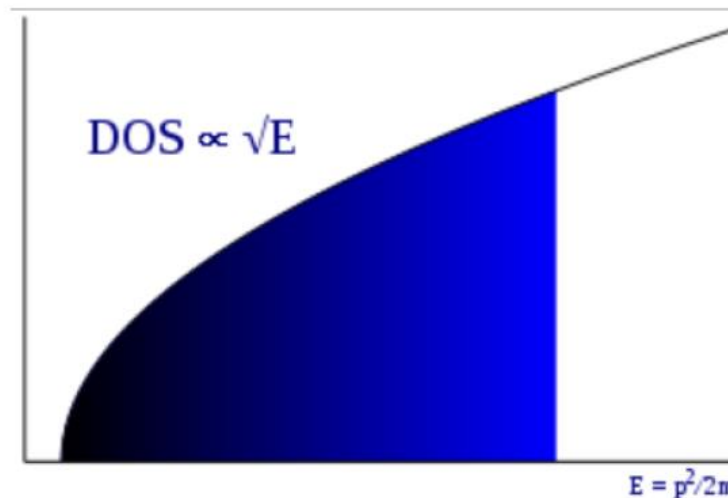
$$2kdk = \frac{2m^* dE}{\hbar^2}$$

$$dk = \frac{2m^* dE}{2k\hbar^2} = \frac{m^* dE}{\hbar \sqrt{2m^* (E - E_c)}}$$

# Gęstość stanów w przestrzeni k

$$\rho(k)dk = \frac{Vk^2}{\pi^2} \frac{m^* dE}{\hbar \sqrt{2m^*(E - E_c)}} = \frac{Vm^* [2m^*(E - E_c)]^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3} dE$$

$$\rho(E)dE = \frac{m^* [2m^*(E - E_c)]^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3} dE$$

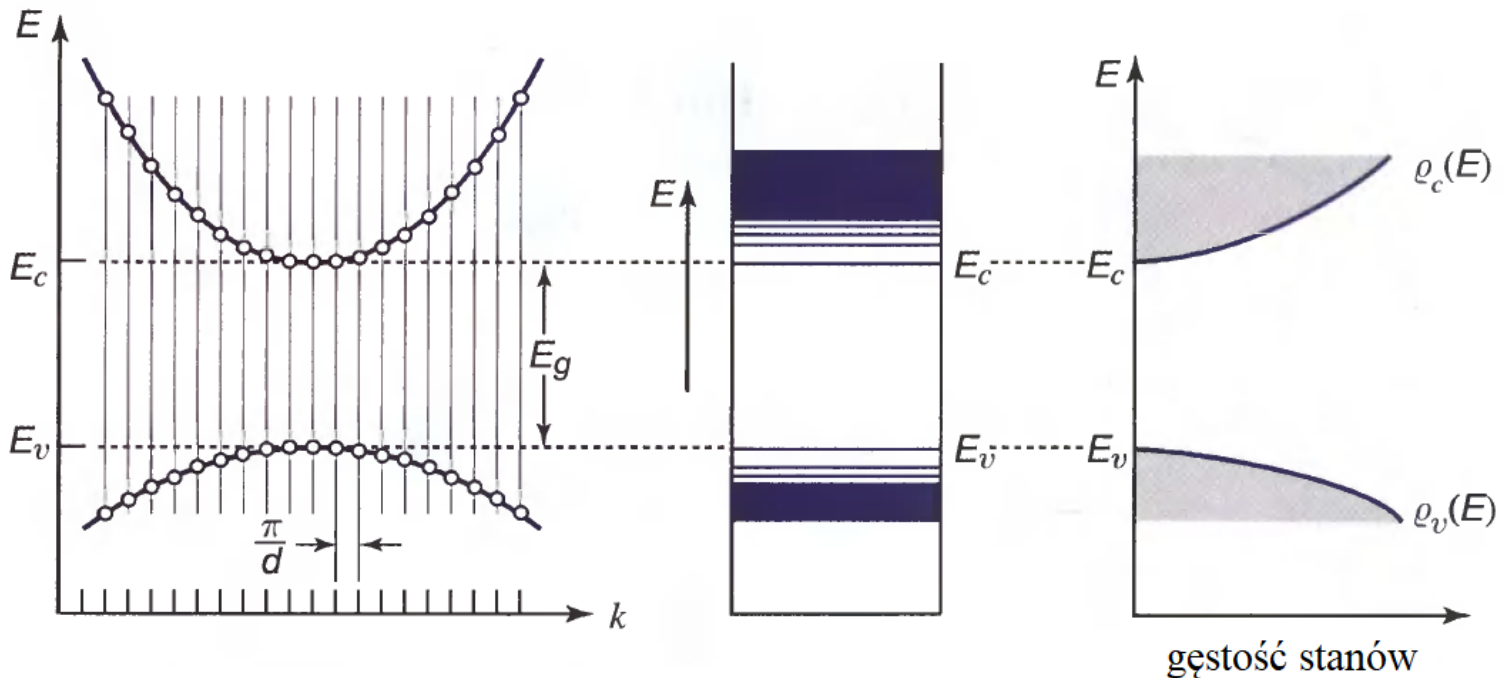


# Gęstość stanów

Gęstość stanów w pobliżu krawędzi pasm:

$$\rho_c(E) = \frac{(2m_c)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_c}, \quad E \geq E_c$$

$$\rho_v(E) = \frac{(2m_v)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E_v - E}, \quad E \leq E_v$$



# Absorpcja - łączna gęstość stanów

Zamiast rozważać ruch elektronów i dziur oddzielnie, można opisać przejście elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa (lub w odwrotną stronę) jako przejście jednej cząstki o masie równej masie zredukowanej  $m_r$ :

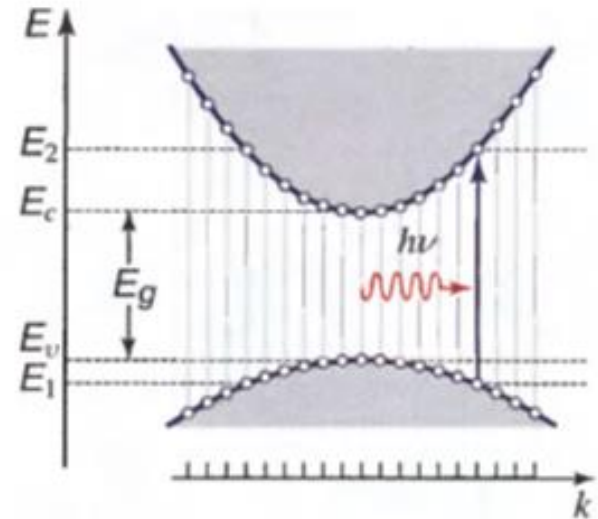
$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_v} + \frac{1}{m_c}$$

$$E_2 = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} \quad E_1 = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}$$

$$E_2 - E_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v} + E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c} = h\nu \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{2m_r}{\hbar^2} (h\nu - E_g)$$

$$E_2 = E_c + \frac{m_r}{m_c} (h\nu - E_g) \quad *$$

$$E_1 = E_v - \frac{m_r}{m_v} (h\nu - E_g) = E_2 - h\nu$$



z zasady zachowania energii:

# Łączna gęstość stanów

Ze względu na równość \* liczba stanów na jednostkę objętości w przedziale energii fotonów od  $h\nu$  do  $h(\nu + d\nu)$  w procesie absorpcji bądź emisji elektron-dziura:

$$\varrho(\nu) d\nu = \varrho_c(E_2) dE_2 \quad \varrho(\nu) = (dE_2/d\nu) \varrho_c(E_2)$$

Łączna gęstość stanów

$$\varrho(\nu) = \frac{hm_r}{m_c} \varrho_c(E_2)$$

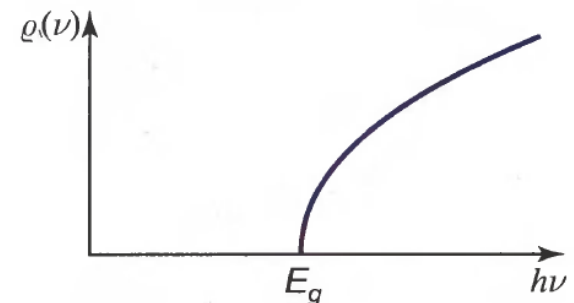
Gęstość stanów w pobliżu krawędzi pasm:

$$\varrho_c(E) = \frac{(2m_c)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_c}, \quad E \geq E_c$$

$$\varrho_c(E_2) = \frac{(2m_c)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E_2 - E_c},$$

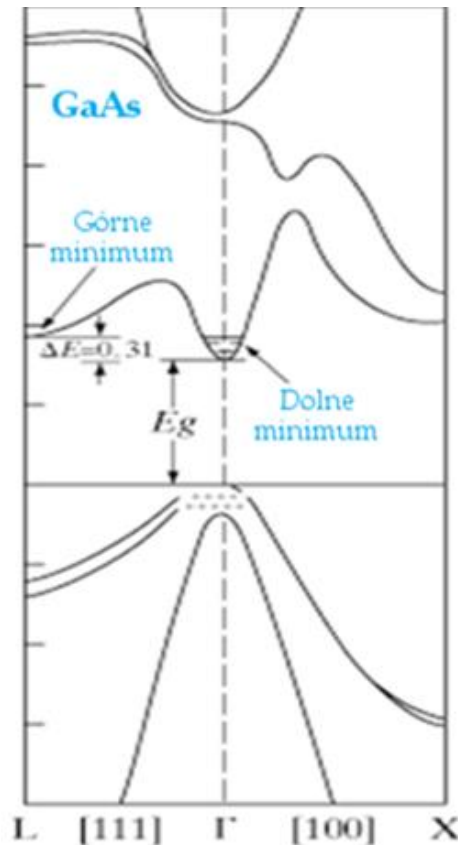
$$E_2 - E_c = \frac{m_r}{m_c} (h\nu - E_g)^* \quad \longrightarrow$$

$$\varrho(\nu) = \frac{(2m_r)^{3/2}}{\pi\hbar^2} \sqrt{h\nu - E_g}, \quad h\nu \geq E_g$$



# Przejścia proste ( np. GaAs )

W pobliżu  $k=0$  zależność  $E(k)$  jest paraboliczna zarówno dla pasma przewodnictwa (e), pasma dziur ciężkich (hh), dziur lekkich (lh) oraz pasma powstałego na skutek oddziaływania spin – orbita (so). Różnica między zależnościami dyspersyjnymi dla poszczególnych pasm wynika tylko z innej wartości masy efektywnej.



$$E_c(k) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e^*}$$

$$E_{hh}(k) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{hh}^*}$$

$$E_{lh}(k) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{lh}^*}$$

$$E_{so}(k) = -\Delta - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{so}^*}$$

# Spektrum współczynnika absorpcji

Prawdopodobieństwo przejścia  $W_{i \rightarrow f}$  jest proporcjonalne do łącznej gęstości stanów, więc współczynnik absorpcji będzie miał podobną zależność funkcyjną od energii fotonów co łączna gęstość stanów, ponieważ w przybliżeniu dipolowym można założyć, że  $M = \text{const}$  (tzn. słabo zależy od  $k$ )

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \rho(h\nu)$$

$$\rho(\nu) = \frac{(2m_r)^{3/2}}{\pi \hbar^2} \sqrt{h\nu - E_g}, \quad h\nu \geq E_g:$$

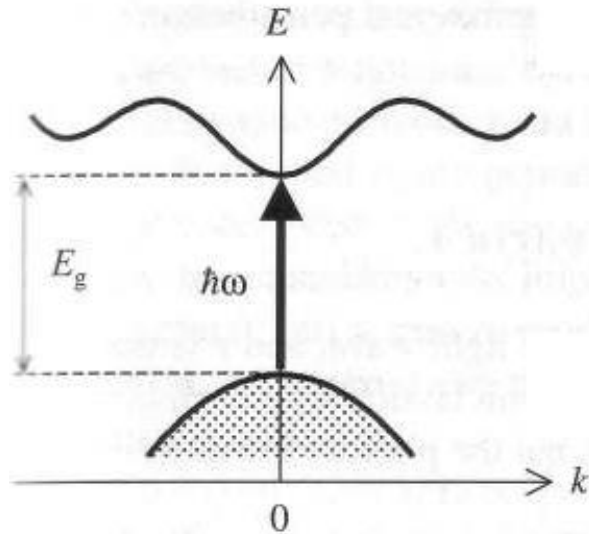
$(h\nu = \hbar\omega)$

$$\hbar\omega < E_g, \quad \alpha(\hbar\omega) = 0$$

$$\hbar\omega \geq E_g, \quad \alpha(\hbar\omega) \sim (\hbar\omega - E_g)^{\frac{1}{2}}$$

# Współczynnik absorpcji dla półprzewodnika z prostą przerwą wzbronioną

Np. GaAs

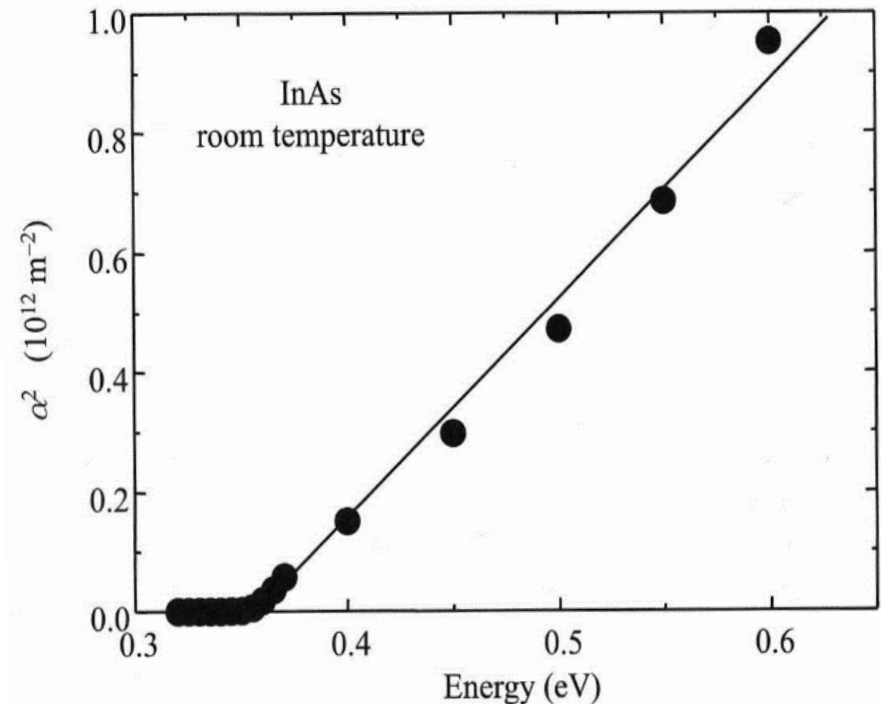


dla  $\hbar\omega < E_g$ ,  $\alpha(\hbar\omega) = 0$

dla  $\hbar\omega \geq E_g$ ,  $\alpha(\hbar\omega) \propto \sqrt{(\hbar\omega - E_g)}$ .

Zależność  $\alpha^2(\hbar\omega)$  dla InAs

M.Fox „Optical Properties of Solids”





# Przejścia skośne

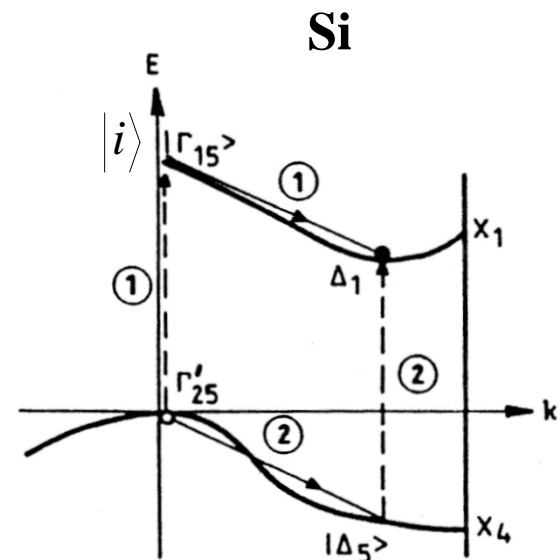
Przejścia skośne mogą pojawić się wtedy i tylko wtedy, gdy w procesie oddziaływania foton–elektron bierze udział trzecia cząstka, która umożliwia spełnienie zasady zachowania wektora falowego. Zazwyczaj taką rolę pełni fonon:

$$E_f = E_i + \hbar\omega \pm \hbar\Omega \quad \hbar\vec{k}_f = \hbar\vec{k}_i \pm \hbar\vec{q}$$

gdzie  $\hbar\Omega$  i  $\hbar\vec{q}$  energia i pęd fononu. Znak „+” odpowiada procesowi z emisją, „-” procesowi z absorpcją fononu.

1. Proces dwuetapowy: elektron jest wzbudzany przy udziale fotonu  $\hbar\omega$  z pasma walencyjnego do stanu wirtualnego bez zachowania energii ale z zachowaniem wektora falowego. W drugim etapie elektron przechodzi ze stanu  $|i\rangle$  do stanu  $\Delta_1$  na dnie pasma przewodnictwa przy udziale procesu absorpcji lub emisji fononu.

2. Możliwe jest przejście takie, że najpierw jest oddziaływanie z fononem, a potem – z fotonem



# Przejścia skośne

**Prawdopodobieństwo absorpcji fotonu w jednostce czasu/jednostkę objętości**

$$\mathfrak{R}_i = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k_c, k_v} \left| \sum_i \frac{\langle f | H_{ep} | i \rangle \langle i | H_{eR} | 0 \rangle}{E_{i0} - \hbar\omega} \right|^2 \delta(E_c(\vec{k}_c) - E_v(\vec{k}_v) - \hbar\omega \pm E_p),$$

**gdzie:  $H_{eR}$  – hamiltonian oddziaływania elektronu z fotonem,  $H_{ep}$  – hamiltonian oddziaływania elektronu z fononem.**

**$|0\rangle$  – stan początkowy układu z zapełnionym pasmem walencyjnym, pustym pasmem przewodnictwa oraz liczbą fononów  $n_p$ ,**

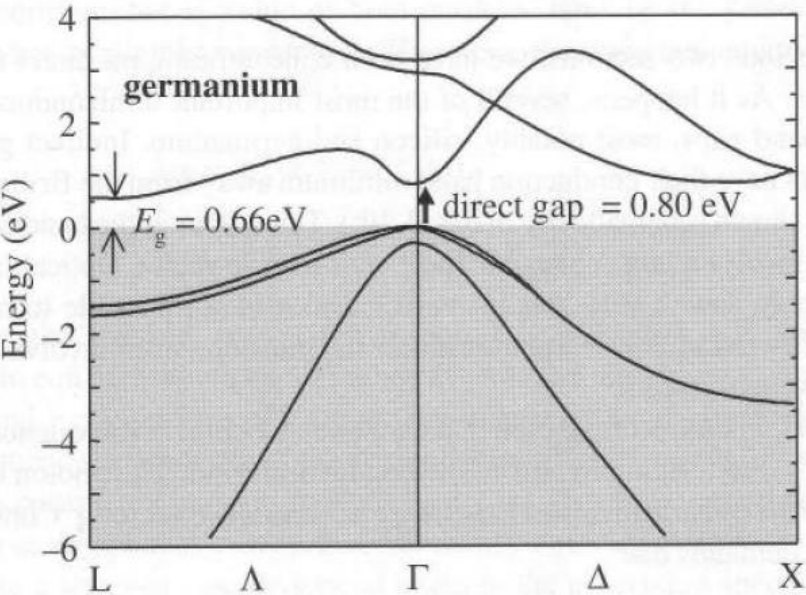
**$|f\rangle$  – stan końcowy układu z elektronem w minimum pasma przewodnictwa, dziurą w maksimum pasma walencyjnego oraz liczbą fononów  $n_p \pm 1$ ,**

**$|i\rangle$  – przedstawia dwa możliwe stany pośrednie, opisane na slajdzie poprzednim.**

**Element macierzowy oddziaływania elektron – fonon zależy od stopnia obsadzenia stanów fononowych**

$$\langle f | H_{ep} | i \rangle = \begin{cases} \sqrt{n_p} & \text{– dla procesu z absorpcją fononu,} \\ \sqrt{n_p + 1} & \text{– dla procesu z emisją fononu,} \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad n_p = \left[ \exp\left(\frac{E_p}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}.$$

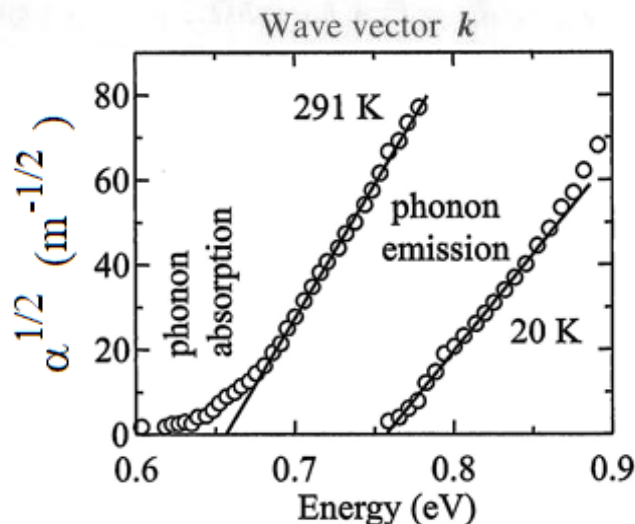
# Współczynnik absorpcji dla półprzewodnika ze skośną przerwą wzbronioną Np. Ge, Si



$$\alpha(\hbar\omega) \propto (\hbar\omega - E_g \mp \hbar\Omega)^2$$

gdzie  $\mp \hbar\Omega$  to energia fononu, absorbowanego bądź emitowanego.

W wyższych temperaturach (pokojowa) absorpcji światła towarzyszy zwykle absorpcja a w niższych – emisja fononu:



$$n_p = \left[ \exp\left(\frac{E_p}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}$$

Zależność  $\sqrt{\alpha(\hbar\omega)} = f(\hbar\omega)$  dla germanu.

M.Fox „Optical Properties of Solids”